

# ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

## 1.1. Випадкові події

### 1.1.1. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей. Основні означення

**Масовим явищем** називається таке, що властиве великій кількості рівноправних об'єктів. Під **рівноправними об'єктами** розуміють результати досліджень у різних галузях, що повторюються при однакових основних умовах.

**Дослідом (експериментом, спостереженням)** називається відтворення якого-небудь певного комплексу основних умов, що може бути повторений скільки завгодно разів.

**Випадковим (стохастичним)** називається дослід, результат якого передбачити завчасно неможливо внаслідок наявності значної кількості неврахованіх сторонніх факторів (перешкод, збурень, шумів).

Кожна реалізація випадкового експерименту при одних і тих же врахованих основних умовах називається **випробуванням**.

Основні умови, що зберігаються незмінними, в загальних рисах визначають результат довільного випробування в межах даного експерименту, а другорядні – змінюються від випробування до випробування і вносять випадкові відмінності в конкретний результат.

**Подією** називається довільне явище, про яке можна сказати, що воно здійснюється чи не здійснюється в результаті випробування. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: *A, B, C, ...*

**Приклад 1.** Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані кульки різного кольору, навмання виймається одна кулька – це випадковий експеримент. Окрема його реалізація – це випробування. Поява (чи не поява) білої (чорної, жовтої, ...) кульки – це подія.

Усі події діляться на достовірні, неможливі і власне випадкові.

**Достовірною** називається подія, що у результаті випробування неодмінно повинна відбутися (позначається *U* ).

**Неможливою** називається подія, що у результаті випробуван-

ня нізащо не може відбутися (позначається  $\emptyset$ ).

**Випадковою (стохастичною)** називається подія, що при багаторазовому повторенні експерименту в одних випробуваннях відбувається, а в інших – ні.

**Приклад 2.** Розглянемо експеримент – однократне кидання симетричного грального кубика з шести гранями, які відмічені цифрами від одиниці до шести, і фіксація числа, що випадає на його верхній грані. Результатом такого експерименту буде випадіння однієї з цифр (очок) 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Тоді достовірна подія – випадіння числа в межах від 1 до 6. Неможлива подія – випадіння числа 12. Випадкова подія – випадіння непарного числа, тобто 1, 3, 5.

Декілька подій називаються **сумісними**, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших у тому ж випробуванні.

Декілька подій називаються **несумісними**, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному випробуванні.

**Приклад 3.** В експерименті – однократне кидання грального кубика – сумісними подіями є випадіння цифри 3 і випадіння непарного числа очок, а несумісними подіями є випадіння цифри 3 і випадіння парного числа очок.

Декілька попарно несумісних подій утворюють **повну групу (сукупність єдино можливих подій)**, якщо в результаті випробування одна і тільки одна з них неодмінно повинна відбутися.

**Приклад 4.** Розглянемо експеримент – однократне кидання грального кубика. Повну групу  $\{A, B, C\}$  складають такі події:  $A = \{\text{випадіння цифри 1 чи 2}\}$ ,  $B = \{\text{випадіння цифри 3 чи 4}\}$ ,  $C = \{\text{випадіння цифри 5 чи 6}\}$ . Повоною групою також є  $\{D, E\}$ , де  $D = \{\text{випадіння парного числа}\}$ ,  $E = \{\text{випадіння непарного числа}\}$ .

Декілька подій в експерименті називаються **рівноможливими**, якщо об'єктивно поява будь-якої з них у результаті випробування не більш можлива, ніж поява іншої. Рівноможливі події мають рівний ступінь об'єктивної можливості (рівні “шанси”) відбутися в результаті випробування.

**Приклад 5.** Розглянемо експеримент – однократне кидання грального кубика. Шість подій – випадіння цифри відповідно 1, 2, 3, 4, 5, 6 – є рівноможливими. Рівноможливими також є дві події – випадіння парного числа і випадіння непарного числа. Випадіння цифри 3 і випадіння парного числа є нерівноможливими подіями.

**Протилежними** називаються дві несумісні події, що утворюють повну групу (є єдино можливими). Їх позначають через  $A$  і  $\bar{A}$ . Протилежна до  $A$  подія  $\bar{A}$  полягає в тому, що подія  $A$  не відбувається. Протилежною для достовірної  $U$  є неможлива подія  $\emptyset$  і навпаки:  $\bar{U} = \emptyset$  і  $\bar{\emptyset} = U$ .

**Приклад 6.** В експерименті – однократне кидання грального кубика – протилежними подіями є  $A = \{\text{випадіння цифри, що не більша } 4\}$  і  $\bar{A} = \{\text{випадіння цифри } 5 \text{ чи } 6\}$ .

Появу випадкової події у конкретному випробуванні не можна звчасно спрогнозувати, оскільки випробування протікають по-різному і передбачити точний хід кожного з них неможливо. Проте зрозуміло, що достатньо великі серії однорідних випробувань підкоряються цілком певним закономірностям, оскільки в цьому випадку невраховані сторонні фактори зравноважують (гасять) один одного.

Для характеристики, як часто подія може відбутися чи не відбутися в результаті випробувань, вводиться поняття **ймовірність** випадкової події – числового ступеню об'єктивної можливості появи даної події в результаті випробувань. Ймовірність події  $A$  позначається  $P(A)$ .

За одиницю виміру ймовірності прийнято ймовірність достовірної події  $U$ :  $P(U) = 1$ . Ймовірність неможливої події  $\emptyset$  прийнята за нуль:  $P(\emptyset) = 0$ . Відповідно ймовірність будь-якої випадкової події  $A$  лежить між нулем і одиницею:  $0 \leq P(A) \leq 1$ . Це співвідношення задає **шкалу ймовірностей**.

### 1.1.2. Класичний і статистичний методи визначення ймовірності випадкової події

Імовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки тоді, коли результати експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. Такі події традиційно називають **випадками**, а відповідний експеримент – класичною теоретико-ймовірнісною **схемою випадків**. У рамках цієї схеми можна точно підрахувати ймовірність події, не проводячи фактично випробувань.

Випадок називається **сприятливим** до події  $A$ , якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то **ймовірність події  $A$  дорівнює відношенню числа сприятливих випадків  $m$  до їх загального числа  $n$ :**  $P(A) = m/n$  (**класичне визначення ймовірності**).

**Зауваження 1.** Ймовірність події  $A$  можна знайти різними способами у залежності від того, яку повну групу **рівноможливих** подій відповідного експерименту вважати випадками.

**Приклад 1.** В експерименті – однократне кидання грального кубика – визначити ймовірність  $P(A)$  події  $A = \{\text{випадіння парного числа очок}\}$ .

□ Розв'яжемо задачу двома способами.

**Перший спосіб.** За випадки приймемо повну групу подій: випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок. Тоді загальна кількість випадків  $n = 6$ , а число сприятливих випадків до події  $A$   $m = 3$  (випадіння 2, 4 чи 6 очок). Шукана ймовірність  $P(A) = m/n = 3/6 = 0,5$ .

**Другий спосіб.** За випадки приймемо повну групу з двох протилежних подій:  $A = \{\text{випадіння парного числа очок}\}$  і  $B = \{\text{випадіння непарного числа очок}\}$ . Тоді загальна кількість випадків  $n = 2$ , а число сприятливих випадків до події  $A$   $m = 1$  (випадіння парного числа очок). Шукана ймовірність  $P(A) = m/n = 1/2 = 0,5$ . ■

**Приклад 2.** Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані 8 зелених, 5 жовтих і 7 червоних кульок, навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірність  $P(A)$  події  $A = \{\text{вийнята кулька зеленого кольору}\}$ .

□ Загальна кількість кульок  $n = 8 + 5 + 7 = 20$ . Число сприятливих випадків  $m = 8$ . Тоді шукана ймовірність

$$P(A) = m/n = 8/20 = 0,4. \blacksquare$$

Імовірність достовірної події дорівнює 1, оскільки такій події сприяють всі можливі випадки. Імовірність неможливої події дорівнює 0, оскільки їй не сприяє ні один з можливих випадків.

Імовірність протилежної події  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ . Дійсно, якщо

події  $A$  зі всіх  $n$  випадків сприяють  $m$ , то їй не сприяють  $n - m$  випадків (вони сприяють протилежній події  $\bar{A}$ ). Тому

$$P(\bar{A}) = (n - m)/n = 1 - m/n = 1 - P(A).$$

Звідси *сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*.

Якщо події в досліді не зводяться до схеми випадків, то оцінку ймовірності події  $A$  можна зробити тільки статистично, проводячи відповідні випробування.

Нехай у межах деякого експерименту проведена серія з  $n$  випробувань, у кожному з яких могла з'явитися чи не з'явитися подія  $A$ . **Відносною частотою**  $W_n(A)$  події  $A$  називають відношення числа випробувань  $m$ , де ця подія відбулася, до загального числа проведених випробувань  $n$ : 
$$W_n(A) = m/n.$$

Очевидно, що

$$0 \leq W_n(A) \leq 1, \quad W_n(U) = 1, \quad W_n(\emptyset) = 0.$$

При незначній кількості випробувань  $n$  відносна частота  $W_n(A)$  носить випадковий характер. Дослідження показують, що зі збільшенням числа випробувань відносна частота  $W_n(A)$  поєднання з події  $A$  проявляє **властивість статистичної стійкості**: вона все менше відхиляється від деякого сталої числа, що й приймається за значення ймовірності  $P(A)$ : 
$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_n(A) \quad (\text{статистичне визначення ймовірності}).$$
 Відповідно за наближене значення ймовірності  $P(A)$  беруть відносну частоту  $W_n(A)$  при достатньо великій кількості випробувань  $n$ : 
$$P(A) \approx W_n(A).$$

Зазначена властивість є одним з проявів **закону великих чисел** і більш строго буде сформульована далі.

Наприклад, при багатократному киданні симетричної монети відносна частота поєднання герба мало відрізняється від числа 0,5 – ймовірності цієї події.

**Зауваження 2.** З того, що ймовірність деякої події  $A$  дорівнює одиниці, ще не випливає достовірність цієї події  $A$ . Аналогічно, якщо ймовірність деякої події  $A$  дорівнює нулю, це ще не означає, що подія  $A$  – неможлива.

### 1.1.3. Елементи комбінаторики

Для підрахунку кількості всіх можливих випадків  $n$  і числа сприятливих випадків  $m$  часто використовують різні комбінаторні співвідношення.

**Комбінаторика** – це розділ математики, що займається підрахунком числа різного типу комбінацій (вибірок), складених з елементів скінченної множини за певними правилами.

При розв'язуванні комбінаторних задач використовують наступні два аксіоматичні правила.

Правило суми. Якщо об'єкт  $a$  можна вибрати  $k$  способами, а об'єкт  $b$  – іншими  $m$  способами (незалежно від вибору  $a$ ), то вибір об'єкта “ $a$  або  $b$ ” може бути здійснений  $k + m$  способами.

Тут зв'язка *або* вживається в розділовому сенсі.

Приклад 1. У місті  $N$  знаходяться  $k = 7$  технічних ВНЗ,  $m = 2$  медичних і  $n = 3$  гуманітарних. Скількома способами  $S$  можна отримати вищу освіту за державним набором у цьому місті?

□ Оскільки державний набір передбачає безоплатну освіту тільки в одному ВНЗ, то можна застосувати правило суми. Згідно з цим правилом число способів  $S = k + m + n = 7 + 2 + 3 = 12$ . ■

Правило добутку. Якщо об'єкт  $a$  можна вибрати  $k$  способами, а після кожного з цих виборів об'єкт  $b$  – іншими  $m$  способами (незалежно від вибору  $a$ ), то вибір упорядкованої пари  $(a, b)$  може бути здійснений  $k \times m$  способами.

Приклад 2. На групу з  $k = 24$  студентів видається  $m = 30$  тем рефератів і  $n = 25$  тем курсових робіт по одному завданню кожного виду на одного студента. Скількома способами  $S$  це можна зробити?

□ Оскільки кожний студент повинен підготувати тільки один реферат і виконати тільки одну курсову роботу, то можна застосувати правило добутку. За цим правилом

$$S = k \times m \times n = 24 \times 30 \times 25 = 18000. \blacksquare$$

Нехай  $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  – деяка скінчена множина з  $n$  елементів. Розглянемо основні типи комбінацій – перестановки, розміщення та сполучення.

Комбінації з  $n$  елементів, які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів, називаються **перестановками**.

Кількість таких перестановок позначають символом  $P_n$ , де  $n$  – число елементів, що входять у кожну перестановку.

**Приклад 3.** Нехай множина  $M$  містить три букви  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Скласти всі можливі упорядковані комбінації з цих букв по три в кожній без повторення.

□ Одержано:  $A B C$ ,  $C A B$ ,  $B A C$ ,  $B C A$ ,  $C B A$ ,  $A C B$  (6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються одна від одної тільки порядком розташування букв. Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить,  $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ , але  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ . Прийшли до поняття факторіала. ■

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до  $n$  включно називають  **$n$ -факторіалом** і пишуть:  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ .

Вважають, що  $0! = 1$  і  $1! = 1$ . Основна властивість факторіала:  $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ .

**Число перестановок** обчислюють за формулою 
$$P_n = n!$$

Комбінації з  $n$  елементів по  $m$  елементів, які відрізняються одна від одної самими елементами або порядком елементів, називаються **розміщеннями**. Тут зв'язка *або* вживається в об'єднуючому сенсі.

Кількість таких розміщень позначаються символом  $A_n^m$ , де  $n$  – число всіх наявних елементів,  $m$  – число елементів у кожній комбінації. **Число розміщень** обчислюють за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1),$$

де  $n \geq m \geq 0$ ;  $m, n \in N \cup \{0\}$ . Вважають, що  $A_n^0 = 1$ .

**Приклад 4.** Нехай множина  $M$  містить п'ять букв  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  і  $E$ . Скласти всі комбінації тільки з двох букв без повторення і з врахуванням порядку.

□ Одержано:  $A B$ ,  $A C$ ,  $A D$ ,  $A E$ ,  $B A$ ,  $B C$ ,  $B D$ ,

$B E$ ,  $C A$ ,  $C B$ ,  $C D$ ,  $C E$ ,  $D A$ ,  $D B$ ,  $D C$ ,  $D E$ ,  $E A$ ,  $E B$ ,  $E C$ ,  $E D$ . Видно, що всі отримані комбінації (їх 20) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації  $A B$  і  $B A$  вважають різними).

За наведеною формулою  $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ , що збігається з одержаним результатом. При утворенні розміщень перший елемент може бути обраний  $n=5$  способами, оскільки існує можливість незалежного вибору з усіх наявних  $n=5$  елементів; а другий –  $n-1=4$  способами, оскільки тепер вибір проводиться з решти  $n-1=4$  елементів, що залишилися. За правилом добутку маємо всього  $5 \cdot 4 = 20$  різних комбінацій. ■

Формулу для числа розміщень  $A_n^m$  можна подати у факторіальному вигляді  $A_n^m = n!/(n-m)!$ . Основні властивості розміщень:  $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$ ;  $A_n^n = P_n = n!$ .

Розміщення й перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

**Сполученнями** називаються комбінації з  $n$  елементів по  $m$ , які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом ( $n \geq m \geq 0$  і  $m, n \in N \cup \{0\}$ ), при цьому порядок елементів не враховується.

З кожного сполучення з  $m$  елементами можна утворити  $P_m$  упорядкованих розміщень. Тому **кількість сполучень** із  $n$  елементів по  $m$   $C_n^m$  дорівнює числу розміщень з  $n$  елементів по  $m$ , поділеному на число перестановок з  $m$  елементів:  $C_n^m = A_n^m / P_m$ . Вважають, що  $C_n^0 = 1$ .

Використовуючи для кількості розміщень і перестановок факторіальні співвідношення  $A_n^m = n!/(n-m)!$  і  $P_n = n!$ , дістанемо формулу числа сполучень у вигляді  $C_n^m = n!/(m!(n-m)!)$ .

Основна властивість сполучень:

$$C_n^{n-m} = P_n / (P_{n-m} \cdot P_m) = n! / ((n-m)!m!); \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Приклад 5. Множина  $M$  утворена з п'яти букв  $A, B, C, D$  і  $E$ . Скласти невпорядковані комбінації з двох букв без повторення, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

□ Маємо:  $A B, A C, A D, A E, B C, B D, B E, C D, C E, D E$ . Виходить, що число сполучень з  $n=5$  елементів по  $m=2$  дорівнює 10. Це число можна обчислити так:

$$C_5^2 = 5!/(2!(5-2)!) = 10. \blacksquare$$

Приклад 6. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані  $n_1 = 8$  білих і  $n_2 = 4$  чорних кульок, навмання виймаються  $m_e = 2$  кульки. Знайти ймовірності наступних подій:

- а)  $A = \{\text{вийняті кульки білі}\};$     б)  $B = \{\text{вийняті кульки чорні}\};$
- в)  $C = \{\text{вийняті кульки різномальорові}\};$     г)  $D = \{\text{обидві кульки білі або обидві чорні}\}.$

□ За класичною формулою ймовірності  $P(A) = m/n$ , де  $n$  – загальна кількість випадків у досліді,  $m$  – число сприятливих випадків, яке для кожної з подій  $A, B, C$  і  $D$  позначимо відповідно  $m(A), m(B), m(C)$  і  $m(D)$ . Загальна кількість випадків у досліді – це число сполучень з  $n_e = n_1 + n_2 = 8 + 4 = 12$  кульок по  $m_e = 2$ , тобто  $n = C_{n_e}^{m_e} = C_{12}^2 = 12!/(2!(12-2)!) = 66$ .

а) Для події  $A$  кількість сприятливих випадків  $m(A)$  – це число сполучень з  $n_1 = 8$  білих куль по  $m_e = 2$ , тобто

$$m(A) = C_{n_1}^{m_e} = C_8^2 = 8!/(2!(8-2)!) = 28.$$

Таким чином,  $P(A) = m(A)/n = 28/66 = 14/33$ .

б) Для події  $B$  кількість сприятливих випадків  $m(B)$  – це кількість сполучень з  $n_2 = 4$  чорних куль по  $m_e = 2$ , тобто

$$m(B) = C_{n_2}^{m_e} = C_4^2 = 4!/(2!(4-2)!) = 6.$$

Отже,  $P(B) = m(B)/n = 6/66 = 1/11$ .

в) Для події  $C$  кількість сприятливих випадків  $m(C)$  визна-

чається за правилом множення  $m(C) = n_1 n_2 = 8 \cdot 4 = 32$ .

Таким чином,  $P(C) = m(C)/n = 32/66 = 16/33$ .

г) За результатами пунктів а) і б) даного прикладу дві білі куки можна одержати  $m(A) = 28$  способами, а дві чорні –  $m(B) = 6$  способами. Тоді за правилом додавання

$$m(D) = m(A) + m(B) = 28 + 6 = 34.$$

Отже,  $P(D) = m(D)/n = 34/66 = 17/33$ . ■

Приклад 7. У туристичній групі, в яку входять Андрій, Борис, Сергій, Денис, Едуард, Федір і Геннадій, навмання вибирають командира, його заступника і замікаючого. Знайти ймовірність події  $A = \{\text{Андрій} - \text{командир}, \text{Борис} - \text{його заступник}\}$ .

□ Загальна кількість випадків у досліді – це число розміщень  $n_e = 7$  туристів по  $m_e = 3$ , тобто  $n = A_{n_e}^{m_e} = A_7^3 = 7!/(7-3)! = 210$ .

Якщо командира і його заступника вибрано (Андрія і Бориса), то вибрати замікаючого можна  $m(A) = n_e - 2 = 7 - 2 = 5$  способами (число сприятливих випадків для події  $A$ ).

Тоді за класичною формулою ймовірності

$$P(A) = m(A)/n = 5/210 = 1/42. ■$$